数学おもしろ話

2024.09.21
草　雲

1　循環小数を分数にする

（１）循環小数の例

① 0.77777・・・は小数第１位以降、７が繰り返されています。
② 0.232323・・・は小数第１位以降、２３が繰り返されています。
③ 0.245245245・・・は小数第１位以降、２４５が繰り返されています。
④ 0.6373737・・・は小数第２位以降、３７が繰り返されています。
⑤ 0.37545454・・・は小数第３位以降、５４が繰り返されています。
⑥ 0.9253253253・・・は小数第２位以降、２５３が繰り返されています。
⑦ 0.36592592592・・・は小数第３位以降、５９２が繰り返されています。

（２）循環小数の表し方

① $0.77777\cdots = 0.\dot{7}$　② $0.232323\cdots = 0.\dot{2}\dot{3}$　③ $0.245245245\cdots = 0.\dot{2}4\dot{5}$

④ $0.6373737\cdots = 0.6\dot{3}\dot{7}$　⑤ $0.37545454\cdots = 0.37\dot{5}\dot{4}$

⑥ $0.9253253253\cdots = 0.9\dot{2}5\dot{3}$　⑦ $0.36592592592\cdots = 0.36\dot{5}9\dot{2}$

※繰り返す数字の最初と最後の数字の上に「・」を付けます。（繰り返す数字が１つのときは「・」は１つだけになります。）

（３）循環小数を分数にする方法

（ア）小数第１位以降が繰り返されるとき

$$0.\dot{7} = \frac{7}{9}, \quad 0.\dot{4} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{(\text{繰り返される数字１つ})}{9}$$

$$0.\dot{2}\dot{3} = \frac{23}{99}, \quad 0.\dot{8}\dot{5} = \frac{85}{99}$$

$$\frac{(\text{繰り返される数字２つ})}{99}$$

$$0.\dot{2}4\dot{5} = \frac{245}{999}, \quad 0.\dot{8}1\dot{3} = \frac{813}{999}$$

$$\frac{(\text{繰り返される数字３つ})}{999}$$

分子：繰り返される数字を置く

分母：循環する数字の個数だけ９を並べる

＜備考＞循環小数を分数で表せたら、（分子）÷（分母）を計算し小数にして、元の循環小数と一致することを確かめてみて下さい。

数学おもしろ話

2024.09.21
草　雲

１　循環小数を分数にする

（イ）小数第２位以降の２つの数字が繰り返されるとき

$$0.6\dot{3}\dot{7}=\frac{631}{990} \leftarrow \frac{(\text{左辺の小数点以下の数字全体})-(\text{循環しない数字})}{990}=\frac{637-6}{990}$$

$$0.8\dot{9}\dot{1}=\frac{883}{990} \leftarrow \frac{(\text{左辺の小数点以下の数字全体})-(\text{循環しない数字})}{990}=\frac{891-8}{990}$$

（ウ）小数第２位以降の３つの数字が繰り返されるとき

$$0.9\dot{2}5\dot{3}=\frac{9244}{9990} \leftarrow \frac{(\text{左辺の小数点以下の数字全体})-(\text{循環しない数字})}{9990}=\frac{9253-9}{9990}$$

$$0.2\dot{5}9\dot{7}=\frac{2595}{9990} \leftarrow \frac{(\text{左辺の小数点以下の数字全体})-(\text{循環しない数字})}{9990}=\frac{2597-2}{9990}$$

（エ）小数第３位以降の２つの数字が繰り返されるとき

$$0.37\dot{5}\dot{4}=\frac{3717}{9900} \leftarrow \frac{(\text{左辺の小数点以下の数字全体})-(\text{循環しない数字})}{9900}=\frac{3754-37}{9900}$$

$$0.88\dot{2}\dot{9}=\frac{8741}{9900} \leftarrow \frac{(\text{左辺の小数点以下の数字全体})-(\text{循環しない数字})}{9900}=\frac{8829-88}{9900}$$

（オ）小数第３位以降の３つの数字が繰り返されるとき

$$0.89\dot{3}0\dot{7}=\frac{89218}{99900} \leftarrow \frac{(\text{左辺の小数点以下の数字全体})-(\text{循環しない数字})}{99900}=\frac{89307-89}{99900}$$

$$0.36\dot{5}9\dot{2}=\frac{36556}{99900} \leftarrow \frac{(\text{左辺の小数点以下の数字全体})-(\text{循環しない数字})}{99900}=\frac{36592-36}{99900}$$

（カ）一般に、以下の循環小数※を分数にするには、

$$0.\,57\cdots48\dot{2}6\cdots1\dot{3} \quad \text{---------} \quad ※$$

$$\uparrow\uparrow\quad\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\quad\uparrow\uparrow$$

$$00\cdots0099\cdots99 \quad \text{--------} \quad ☆$$

上記の☆のように、循環しない数字には０を、循環する数字には９を対応させる。
このようにしてできた、☆の並びの数字を左右反対に並べて分母とする。
そして、※の小数点以下の数字（５７・・・４８２６・・・１３）から、循環しない数字（５７・・・４８）を引いた値を分子とする。

数学おもしろ話

2024.09.27
草　雲

２　新聞紙を５０回折ったときの厚み

もし、新聞紙（厚さ 0.1mm）を 50 回折ることができたら、その厚みは、地球から月までの距離（384,440km）をはるかに越えてしまうって本当ですか？

１回折ると　0.1×2^{1} mm

２回折ると　0.1×2^{2} mm

３回折ると　0.1×2^{3} mm

・
・
・

５０回折ると　0.1×2^{50} mm

もし、新聞紙（厚さ 0.1mm）を 50 回折ることができたら、その厚みは、0.1×2^{50} mm になります。

$$
\begin{aligned}
& 0.1 \times 2^{50} \\
&= 0.1 \times (2^{10})^{5} \\
&= 0.1 \times (1024)^{5} \\
&> 0.1 \times (1000)^{5} \quad \cdots ※ \\
&= 0.1 \times (10^{3})^{5} \\
&= 0.1 \times 10^{15}
\end{aligned}
$$

0.1×2^{50} mm $>$ 0.1×10^{15} mm が成り立ちます。

0.1×10^{15} mm $=$ 0.1×10^{9} km $=$ 1×10^{8} km

$=$ １００，０００，０００ km

ゆえに、

0.1×2^{50} mm $>$ １００，０００，０００ km $>$ ３８４，４４０km

新聞紙 50 回折った厚み　　　　地球から月までの距離

よって、
もし、新聞紙（厚さ 0.1mm）を 50 回折ることができたら、その厚みは、地球から月までの距離（384,440km）をはるかに越えてしまいます。

（備考）この話を考えるとき、上述の※の部分の式変形と不等式によって、計算を楽にするところがうまいところです。

（考察）それでは、新聞紙（厚さ 0.1mm）を最低何回折ることができたら、その厚みは、地球から月までの距離（384,440km）を越えるでしょうか？

もし、新聞紙(厚さ 0.1mm)を 40 回折ることができたら、その厚みは、0.1×2^{40} mm になります。

$$
\begin{aligned}
& 0.1 \times 2^{40} \\
&= 0.1 \times (2^{10})^{4} \\
&= 0.1 \times (1024)^{4} \\
&> 0.1 \times (1000)^{4} \quad \cdots ※ \\
&= 0.1 \times (10^{3})^{4} \\
&= 0.1 \times 10^{12}
\end{aligned}
$$

２　新聞紙を５０回折ったときの厚み

0.1×2^{40} mm　>　0.1×10^{12} mm が成り立ちます。

0.1×10^{12} mm ＝ 0.1×10^{6} km ＝ 1×10^{5} km

＝ １００，０００ km

0.1×2^{40} mm > １００，０００ km　・・・①
新聞紙 40 回折った厚み

0.1×2^{41} mm > ２００，０００ km　・・・①×２
新聞紙 41 回折った厚み

0.1×2^{42} mm > ４００，０００ km　・・・①×４
新聞紙 42 回折った厚み

ゆえに、

0.1×2^{42} mm > ４００，０００ km > ３８４，４４０km
新聞紙 42 回折った厚み　　　　地球から月までの距離

よって、
もし、新聞紙（厚さ 0.1mm）を少なくとも 42 回折ることができたら、その厚みは、地球から月までの距離（384,440km）を越えます。

（補足）
もし、新聞紙(厚さ 0.1mm)を 10 回折ることができたら、その厚みは、0.1×2^{10} mm になります。

0.1×2^{10}
$=0.1\times(2^{10})$
$=0.1\times(1024)$
$>0.1\times(1000)$　・・・※
$=0.1\times(10^{3})$
$=0.1\times 10^{3}$

0.1×2^{10} mm　>　0.1×10^{3} mm が成り立ちます。
0.1×10^{3} mm ＝ １００ cm
0.1×2^{10} mm > １００ cm　・・・②
新聞紙 10 回折った厚み

もし、新聞紙(厚さ 0.1mm)を 20 回折ることができたら、その厚みは、0.1×2^{20} mm になります。

0.1×2^{20}
$=0.1\times(2^{10})^{2}$
$=0.1\times(1024)^{2}$
$>0.1\times(1000)^{2}$　・・・※
$=0.1\times(10^{3})^{2}$
$=0.1\times 10^{6}$

0.1×2^{20} mm　>　0.1×10^{6} mm が成り立ちます。
0.1×10^{6} mm ＝ １００ m
0.1×2^{20} mm > １００ m　・・・③
新聞紙 20 回折った厚み

数学おもしろ話

2024.10.02
草　雲

３　ルートの数を小数点以下第３位まで求める

（１）ルートの中が１桁の自然数の場合

$\sqrt{7}$ を小数点以下第３位まで求めます。

$\boxed{2}$	７	１段目
$\boxed{2}$	４	
４$\boxed{6}$	３００	２段目
$\boxed{6}$	２７６	
５２$\boxed{4}$	２４００	３段目
$\boxed{4}$	２０９６	
５２８$\boxed{5}$	３０４００	４段目
$\boxed{5}$	２６４２５	

（手順）

１段目に注目してください。２乗してルートの中の数字の７を越えない最大の自然数を捜します。２×２＝４なので、２ですね。ルートの中の数字の７と、２×２＝４　の２と２と４を１段目のように書きます。２乗して７を越えない自然数の２は、２つとも□で囲んでおきます。

２段目に注目してください。１段目の２と２の和の４を２段目のように書きます。1 段目の７と４の差の３を２段目のように書き、３の後ろに００を付けて、３００にします。
４□×□がこの３００を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。
４６×６＝２７６なので、６と６と２７６を２段目のように書きます。６と６は２つとも□で囲んでおきます。

３段目に注目してください。２段目の４６と６和の５２を３段目のように書きます。
２段目の３００と２７６の差の２４を３段目のように書き、２４の後ろに００を付けて、２４００にします。５２□×□がこの２４００を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。５２４×４＝２０９６なので、４と４と２０９６を３段目のように書きます。
４と４は２つとも□で囲んでおきます。

４段目に注目してください。３段目の５２４と４の和の５２８を４段目のように書きます。３段目の２４００と２０９６の差の３０４を４段目のように書き、３０４の後ろに００を付けて、３０４００にします。５２８□×□がこの３０４００を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。５２８５×５＝２６４２５なので、５と５と２６４２５を４段目のように書きます。５と５は２つとも□で囲んでおきます。

よって、□で囲んだ２つずつの自然数の組から、１つずつ順番に取り出して、
$\sqrt{7}$ ＝２．６４５　　になります。

（備考）

上述のように、４段目までの計算で小数点以下第３位まで求めましたが、５段目以降を同様に計算することで、小数点以下第４位、５位、６位・・・と順次求めることができます。

数学おもしろ話

2024.10.01
草　雲

３　ルートの数を小数点以下第３位まで求める

（２）ルートの中が２桁の自然数の場合

$\sqrt{51}$ を小数点以下第３位まで求めます。

$\boxed{7}$	５１	１段目
$\boxed{7}$	４９	
１４$\boxed{1}$	２００	２段目
$\boxed{1}$	１４１	
１４２$\boxed{4}$	５９００	３段目
$\boxed{4}$	５６９６	
１４２８$\boxed{1}$	２０４００	４段目
$\boxed{1}$	１４２８１	

（手順）

　１段目に注目してください。２乗してルートの中の数字の５１を越えない最大の自然数を捜します。７×７＝４９なので、７ですね。ルートの中の数字の５１と、７×７＝４９の７と７と４９を１段目のように書きます。２乗して５１を越えない自然数の７は、２つとも□で囲んでおきます。

　２段目に注目してください。１段目の７と７の和の１４を２段目のように書きます。１段目の５１と４９の差の２を２段目のように書き、２の後ろに００を付けて、２００にします。１４□×□がこの２００を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。
１４１×１＝１４１なので、１と１と１４１を２段目のように書きます。１と１は２つとも□で囲んでおきます。

　３段目に注目してください。２段目の１４１と１和の１４２を３段目のように書きます。
２段目の２００と１４１の差の５９を３段目のように書き、５９の後ろに００を付けて、５９００にします。１４２□×□がこの５９００を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。１４２４×４＝５６９６なので、４と４と５６９６を３段目のように書きます。
４と４は２つとも□で囲んでおきます。

　４段目に注目してください。３段目の１４２４と４の和の１４２８を４段目のように書きます。３段目の５９００と５６９６の差の２０４を４段目のように書き、２０４の後ろに００を付けて、２０４００にします。１４２８□×□がこの２０４００を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。１４２８１×１＝１４２８１なので、１と１と１４２８１を４段目のように書きます。１と１は２つとも□で囲んでおきます。

　よって、□で囲んだ２つずつの自然数の組から、１つずつ順番に取り出して、
$\sqrt{51}=7.141$ になります。

（備考）

　上述のように、４段目までの計算で小数点以下第３位まで求めましたが、５段目以降を同様に計算することで、小数点以下第４位、５位、６位・・・と順次求めることができます。

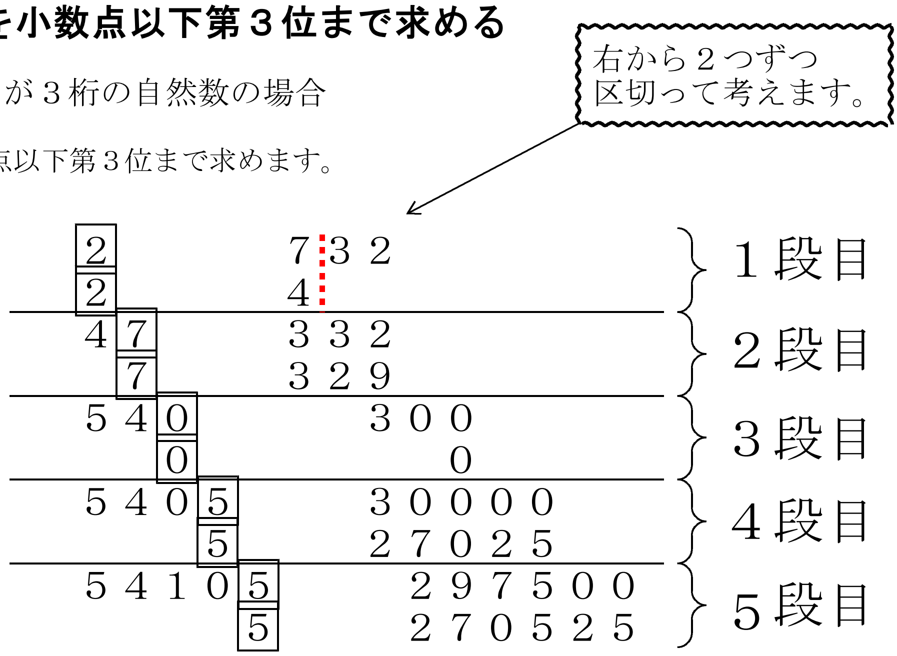
数学おもしろ話

2024.10.03
草　雲

３　ルートの数を小数点以下第３位まで求める

（３）ルートの中が３桁の自然数の場合

$\sqrt{732}$ を小数点以下第３位まで求めます。



（手順）

１段目に注目してください。２乗してルートの中の百の位の数字の７を越えない最大の自然数を捜します。２×２＝４なので、２ですね。ルートの中の数字の７３２と、２×２＝４の２と２と４を１段目のように書きます。２乗して７を越えない自然数の２は、２つとも□で囲んでおきます。

２段目に注目してください。１段目の２と２の和の４を２段目のように書きます。１段目の７と４の差の３を２段目のように書き、ルートの中の数字の３２をそのまま下ろして、３の後ろに付けて、３３２にします。４□×□がこ３３２を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。４７×７＝３２９なので、７と７と３２９を２段目のように書きます。７と７は２つとも□で囲んでおきます。

３段目に注目してください。２段目の４７と７の和の５４を３段目のように書きます。２段目の３３２と３２９の差の３を３段目のように書き、３の後ろに００を付けて、３００にします。５４□×□がこの３００を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。５４０×０＝０なので、０と０と０を３段目のように書きます。０と０は２つとも□で囲んでおきます。

４段目に注目してください。３段目の５４０と０の和の５４０を４段目のように書きます。３段目の３００と０の差の３００を４段目のように書き、３００の後ろに００を付けて、３００００にします。５４０□×□がこの３００００を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。３４０５×５＝２７０２５なので、５と５と２７０２５を４段目のように書きます。５と５は２つとも□で囲んでおきます。

５段目に注目してください。４段目の５４０５と５の和の５４１０を５段目のように書きます。４段目の３００００と２７０２５の差の２９７５を５段目のように書き、２９７５の後ろに００を付けて、２９７５００にします。５４１０□×□がこの２９７５００を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。５４１０５×５＝２７０５２５なので、５と５と２７０５２５を５段目のように書きます。５と５は２つとも□で囲んでおきます。

よって、□で囲んだ２つずつの自然数の組から、１つずつ順番に取り出して、
$\sqrt{732}=27.055$　になります。

（備考）

上述のように、５段目までの計算で小数点以下第３位まで求めましたが、６段目以降を同様に計算することで、小数点以下第４位、５位、６位・・・と順次求めることができます。

数学おもしろ話

2024.10.04
草　雲

３　ルートの数を小数点以下第３位まで求める

（４）ルートの中が４桁の自然数の場合

$\sqrt{5273}$ を小数点以下第３位まで求めます。

右から２つずつ
区切って考えます。

$\boxed{7}$	５２｜７３	１段目
$\boxed{7}$	４９	
１４$\boxed{2}$	３７３	２段目
$\boxed{2}$	２８４	
１４４$\boxed{6}$	８９００	３段目
$\boxed{6}$	８６７６	
１４５２$\boxed{1}$	２２４００	４段目
$\boxed{1}$	１４５２１	
１４５２２$\boxed{5}$	７８７９００	５段目
$\boxed{5}$	７２６１２５	

（手順）

１段目に注目してください。２乗してルートの中の千と百の位の数字の５２を越えない最大の自然数を捜します。７×７＝４９なので、７ですね。ルートの中の数字の５２７３と、７×７＝４９の７と７と４９を１段目のように書きます。２乗して４９を越えない自然数の７は、２つとも□で囲んでおきます。

２段目に注目してください。１段目の７と７の和の１４を２段目のように書きます。１段目の５２と４９の差の３を２段目のように書き、ルートの中の数字の７３をそのまま下ろして、３の後ろに付けて、３７３にします。１４□×□がこ３７３を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。１４２×２＝２８４なので、２と２と２８４を２段目のように書きます。２と２は２つとも□で囲んでおきます。

３段目に注目してください。２段目の１４２と２和の１４４を３段目のように書きます。２段目の３７３と２８４の差の８９を３段目のように書き、８９の後ろに００を付けて、８９００にします。１４４□×□がこの８９００を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。１４４６×６＝８６７６なので、６と６と８６７６を３段目のように書きます。６と６は２つとも□で囲んでおきます。

４段目に注目してください。３段目の１４４６と６の和の１４５２を４段目のように書きます。３段目の８９００と８６７６の差の２２４を４段目のように書き、２２４の後ろに００を付けて、２２４００にします。１４５２□×□がこの２２４００を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。１４５２１×１＝１４５２１なので、１と１と１４５２１を４段目のように書きます。１と１は２つとも□で囲んでおきます。

５段目に注目してください。４段目の１４５２１と１の和の１４５２２を５段目のように書きます。４段目の２２４００と１４５２１の差の７８７９を５段目のように書き、７８７９の後ろに００を付けて、７８７９００にします。１４５２２□×□がこの７８７９００を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。１４５２２５×５＝７２６１２５なので、５と５と７２６１２５を５段目のように書きます。５と５は２つとも□で囲んでおきます。

よって、□で囲んだ２つずつの自然数の組から、１つずつ順番に取り出して、
$\sqrt{5273}$ ＝７２．６１５　になります。

（備考）

上述のように、５段目までの計算で小数点以下第３位まで求めましたが、６段目以降を同様に計算することで、小数点以下第４位、５位、６位・・・と順次求めることができます。

数学おもしろ話

2024.10.05
草　雲

３　ルートの数を小数点以下第３位まで求める

（５）ルートの中が５桁の自然数の場合

$\sqrt{39851}$ を小数点以下第３位まで求めます。

右から２つずつ
区切って考えます。

$\boxed{1}$	３ ９ ８ ５ １	１段目
$\boxed{1}$	１	
２ $\boxed{9}$	２ ９ ８	２段目
$\boxed{9}$	２ ６ １	
３ ８ $\boxed{9}$	３ ７ ５ １	３段目
$\boxed{9}$	３ ５ ０ １	
３ ９ ８ $\boxed{6}$	２ ５ ０ ０ ０	４段目
$\boxed{6}$	２ ３ ９ １ ６	
３ ９ ９ ２ $\boxed{2}$	１ ０ ８ ４ ０ ０	５段目
$\boxed{2}$	７ ９ ８ ４ ４	
３ ９ ９ ２ ４ $\boxed{7}$	２ ８ ５ ５ ６ ０ ０	６段目
$\boxed{7}$	２ ７ ９ ４ ７ ２ ９	

（手順）

１段目に注目してください。２乗してルートの中の万の位の数字の３を越えない最大の自然数を捜します。１×１＝１なので、１ですね。ルートの中の数字の３９８５１と、１×１＝１の１と１と１を１段目のように書きます。２乗して３を越えない自然数の１は、２つとも□で囲んでおきます。

２段目に注目してください。１段目の１と１の和の２を２段目のように書きます。１段目の３と１の差の２を２段目のように書き、ルートの中の数字の９８をそのまま下ろして、２の後ろに付けて、２９８にします。２□×□がこ２９８を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。２９×９＝２６１なので、９と９と２６１を２段目のように書きます。９と９は２つとも□で囲んでおきます。

３段目に注目してください。２段目の２９と９の和の３８を３段目のように書きます。２段目の２９８と２６１の差の３７を３段目のように書き、ルートの中の数字の５１をそのまま下ろして、３７の後ろに付けて、３７５１にします。３８□×□がこの３７５１を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。３８９×９＝３５０１なので、９と９と３５０１を３段目のように書きます。９と９は２つとも□で囲んでおきます。

４段目に注目してください。３段目の３８９と９の和の３９８を４段目のように書きます。３段目の３７５１と３５０１の差の２５０を４段目のように書き、２５０の後ろに００を付けて、２５０００にします。３９８□×□がこの２５０００を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。３９８６×６＝２３９１６なので、６と６と２３９１６を４段目のように書きます。６と６は２つとも□で囲んでおきます。

５段目に注目してください。４段目の３９８６と６の和の３９９２を５段目のように書きます。４段目の２５０００と２３９１６の差の１０８４を５段目のように書き、１０８４の後ろに００を付けて、１０８４００にします。３９９２□×□がこの１０８４００を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。３９９２２×２＝７９８４４なので、２と２と７９８４４を５段目のように書きます。２と２は２つとも□で囲んでおきます。

６段目に注目してください。５段目の３９９２２と２の和の３９９２４を６段目のように書きます。５段目の１０８４００と７９８４４の差の２８５５６を６段目のように書き、２８５５６の後ろに００を付けて、２８５５６００にします。３９９２４□×□がこの２８５５６００を越えない最大の同じ自然数を□に入れます。３９９２４７×７＝２７９４７２９なので、７と７と２７９４７２９を６段目のように書きます。７と７は２つとも□で囲んでおきます。

数学おもしろ話

2024.10.05
草　雲

３　ルートの数を小数点以下第３位まで求める

よって、□で囲んだ２つずつの自然数の組から、１つずつ順番に取り出して、
$\sqrt{39851}=199.627$　になります。

（備考）
上述のように、６段目までの計算で小数点以下第３位まで求めましたが、７段目以降を同様に計算することで、小数点以下第４位、５位、６位・・・と順次求めることができます。

数学おもしろ話

2024.10.07
草　雲

４　１０の位が等しい２桁の数のかけ算

（１）１３×１８＝（１３＋８）×１０＋３×８＝２１０＋２４＝２３４

１桁目同士の積

（２）３６×３９＝（３６＋９）×３０＋６×９＝１３５０＋５４＝１４０４

１桁目同士の積

（３）５２×５７＝（５２＋７）×５０＋２×７＝２９５０＋１４＝２９６４

１桁目同士の積

（４）７１×７４＝（７１＋４）×７０＋１×４＝５２５０＋４＝５２５４

１桁目同士の積

（５）９４×９６＝（９４＋６）×９０＋４×６＝９０００＋２４＝９０２４

１桁目同士の積

（６）２８×２２＝（２８＋２）×２０＋８×２＝６００＋１６＝６１６

１桁目同士の積

(一般に)

１０の位がａで１の位がｂの数をａｂと表すとする。
１０の位がａで１の位がｃの数をａｃと表すとする。

ａｂ×ａｃ＝（１０ａ＋ｂ）×（１０ａ＋ｃ）＝（１０ａ＋ｂ＋ｃ）×１０ａ＋ｂｃ

１桁目同士の積

＝１００ａ^2＋１０ａｂ＋１０ａｃ＋ｂｃ　---------- ①

一方、(１０ａ＋ｂ)(１０ａ＋ｃ)を展開すると、１００ａ^2＋１０ａｂ＋１０ａｃ＋ｂｃとなるので、①と等しいことが確認できます。

数学おもしろ話

2024.10.26
草　雲

５　倍数の見つけ方

（１）２の倍数
　１の位が偶数の数

（２）３の倍数
　各位の数の和が３の倍数になる数

（３）４の倍数
　下２桁が４の倍数の数

（４）５の倍数
　１の位が０または５の数

（５）６の倍数
　１の位が偶数で、各桁の数の和が３の倍数になる数

（６）７の倍数
　１の位から３桁ごとに区切り、それらを交互に加減した結果が７の倍数になる数

（例）　2９３３（９３３－２＝９３１は７の倍数である）

　７0２８０（２８０－７０＝２１０は７の倍数である）

　５８2０９２（９２－５８２＝－４９０は７の倍数である）

　1００3０９３（９３－３＋１＝９１は７の倍数である）

（７）８の倍数
　下３桁が８の倍数の数

（８）９の倍数
　各位の数の和が９の倍数になる数

（９）１０の倍数
　１位の数が０の数

（10）１１の倍数
　１の位から３桁ごとに区切り、それらを交互に加減した結果が１１の倍数になる数
　（７の倍数を参照）

（11）１２の倍数
　下２桁が４の倍数の数で、各位の数の和が３の倍数になる数

（12）１３の倍数
　１の位から３桁ごとに区切り、それらを交互に加減した結果が１３の倍数になる数
　（７の倍数を参照）

＜備考＞ 類似した見つけ方による分類

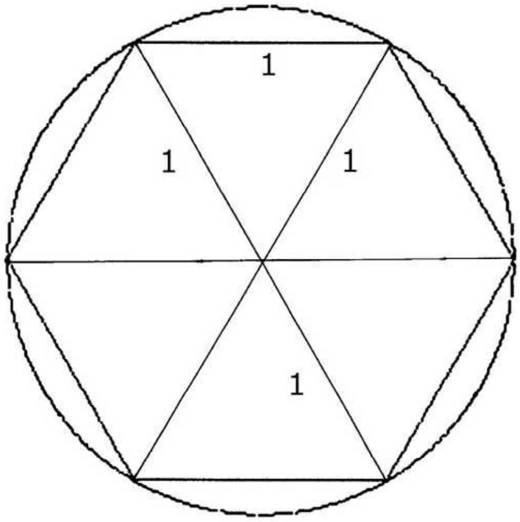
- ３の倍数／９の倍数
- ４の倍数／８の倍数
- ７の倍数／１１の倍数／１３の倍数
- ２の倍数／５の倍数／１０の倍数
- ６の倍数／１２の倍数

数学おもしろ話

2024.10.29
草　雲

６　円周率πは３より大きい

（１）半径１の円とそれに内接する正六角形を考えます。



上図のように、円の中心を通る正六角形の対角線を３本引きます。
正六角形は、１辺の長さが１の６つの正三角形に分割されます。

（２）上図より、次の不等式は明らかに成立します。
（半径１の円の周の長さ）＞（半径１の円に内接する正六角形の周の長さ）--- ①

（３）半径１の円の周の長さ＝２π --- ②　（円周の長さ＝直径×π より）

半径１の円に内接する正六角形の周の長さ＝６ --- ③　（上図 より）

（４）②と③を①の不等式に代入します。
２π＞６ --- ④

（５）④の両辺を２で割ると、
π＞３ が成立します。

（６）よって、円周率πは３より大きいことが分かります。

数学おもしろ話

2024.10.26
草　雲

7　ウサギはカメをいつまでたっても追い越せない

ウサギの速さはカメの速さの２倍。例えば、ウサギの速さは１０ｍ／ｓで、カメの速さは５ｍ／ｓとします。

カメはスタートラインより１０ｍ先の位置で、ウサギと同時にスタートします。

（手順１）

最初、ウサギはスタートラインより１０ｍ先のカメの位置まで進みます。

このとき、カメはスタートラインより１０ｍ＋５ｍ先の位置まで進んでいます。

（手順２）

次ぎに、ウサギはスタートラインより１０ｍ＋５ｍ先のカメの位置まで進みます。

このとき、カメはスタートラインより１０ｍ＋５ｍ＋２．５ｍ先の位置まで進んでいます。

（手順３）

更に、ウサギはスタートラインより１０ｍ＋５ｍ＋２．５ｍ先のカメの位置まで進みます。

このとき、カメはスタートラインより１０ｍ＋５ｍ＋２．５ｍ＋１．２５ｍ先の位置まで進んでいます。

（手順４）

更に、ウサギはスタートラインより１０ｍ＋５ｍ＋２．５ｍ＋１．２５ｍ先のカメの位置まで進みます。

このとき、カメはスタートラインより１０ｍ＋５ｍ＋２．５ｍ＋１．２５ｍ＋０．６２５ｍ先の位置まで進んでいます。

（手順５）

更に、ウサギはスタートラインより１０ｍ＋５ｍ＋２．５ｍ＋１．２５ｍ＋０．６２５ｍ先のカメの位置まで進みます。

このとき、カメはスタートラインより１０ｍ＋５ｍ＋２．５ｍ＋１．２５ｍ＋０．６２５ｍ＋０．３１２５ｍ先の位置まで進んでいます。

このように考えると、ウサギはカメをいつまでたっても追い越せないのではないでしょうか。しかし実際には、ウサギはカメを追い越します。どこがおかしいのでしょうか。

手順１にかかる時間は、ウサギが１０ｍだけ進むので、１秒です。
手順２にかかる時間は、ウサギが５ｍだけ進むので、０．５秒です。
手順３にかかる時間は、ウサギが２．５ｍだけ進むので、０．２５秒です。
手順４にかかる時間は、ウサギが１．２５ｍだけ進むので、０．１２５秒です。
手順５にかかる時間は、ウサギが０．６２５ｍだけ進むので、０．０６２５秒です。

つまり、上記のように考えた場合の時間は次ぎになります。

１秒 ＋ ０．５秒 ＋ ０．２５秒 ＋ ０．１２５秒 ＋ ０．０６２５秒 ＋・・・　　①

①は、初項１、公比１／２ の無限等比級数の和になります。

よって、無限等比級数の和の公式より、$① = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$

この考え方は２秒以内の話であり、「ウサギはカメをいつまでたっても追い越せない」のではなく、「ウサギはカメを２秒以内には追い越せない」となります。

（備考）

スタート後の経過時間をｔ秒とします。
ｔ秒後のスタートラインからのカメの位置は、１０＋５ｔ（ｍ）
ｔ秒後のスタートラインからのウサギの位置は、１０ｔ（ｍ）
１０＋５ｔ＝１０ｔ　より、ｔ＝２
よって、ウサギはカメに２秒後に追いつきます。

数学おもしろ話

2024.11.5
草　雲

８　総当たりではなく完全数を求める

　６の正の約数は、１、２、３、６です。
　２８の正の約数は、１、２、４、７、１４、２８です。
　自分自身を除いた正の約数の和が自分自身と等しい自然数を「完全数」と言います。
　例えば、６の正の約数は、１、２、３、６なので、自分自身の６を除いた正の約数の和１＋２＋３＝６となり、自分自身の６と等しくなるので、６は完全数です。
　また、２８の正の約数は、１、２、４、７、１４、２８なので、自分自身の２８を除いた正の約数の和１＋２＋４＋７＋１４＝２８となり、自分自身の２８と等しくなるので、２８も完全数です。
　完全数を見付けるのに、自分自身を除く正の約数の和が自分自身と等しくなる自然数を１から順番に１つずつ調べていくと、パソコンを使ってもかなりの時間がかかります。
　ところで、ｎが自然数で、(2^n-1) が素数のとき、$2^{n-1}(2^n-1)$は完全数になることが分かっています。ここで、素数とは、１と自分自身のみを正の約数としてもつ２以上の自然数です。例えば、２の正の約数は１と２。３の正の約数は１と３。５の正の約数は１と５。７の正の約数は１と７。１１の正の約数は１と１１。つまり、２、３、５、７、１１などが素数です。
　しかし、全ての完全数が$2^{n-1}(2^n-1)$の形で表されるかどうかと言うと、全ての偶数の完全数については真(成立する)であることが証明されています。また、奇数の完全数は未だ見つかっていません。
　このことを利用すると、小さい順に８個目の完全数である 2,305,843,008,139,950,000 をパソコンを用いて、比較的短時間で見付けることができます。
↑
（230 京 5,843 兆 81 億 3,995 万）

　下の表は、表計算ソフト「Excel」でマクロ「VBA」を組んで、完全数を求めた結果です。完全数を小さい順に８個まで求めています。６個目の完全数でも１億を越えています。

①ｎ＝ 2 のとき、(2^n-1)は素数。
　$2^{n-1}(2^n-1)$＝6 は、完全数。

②ｎ＝ 3 のとき、(2^n-1)は素数。
　$2^{n-1}(2^n-1)$＝28 は、完全数。

③ｎ＝ 5 のとき、(2^n-1)は素数。
　$2^{n-1}(2^n-1)$
　＝496 は、完全数。

④ ｎ＝ 7 のとき、(2^n-1)は素数。
　$2^{n-1}(2^n-1)$
　＝8,128 は、完全数。

⑤ｎ＝ 13 のとき、(2^n-1)は素数。
　$2^{n-1}(2^n-1)$
　＝33,550,336 は、完全数。

⑥ｎ＝17 のとき、(2^n-1)は素数。
　$2^{n-1}(2^n-1)$
　＝8,589,869,056 は、完全数。

⑦ｎ＝19 のとき、(2^n-1)は素数。
　$2^{n-1}(2^n-1)$
　＝137,438,691,328 は、完全数。

⑧ｎ＝31 のとき、(2^n-1)は素数。
　$2^{n-1}(2^n-1)$
　＝2,305,843,008,139,950,000 は、完全数。

n	2^n-1	素数か？	$2^{n-1}(2^n-1)$	完全数か？
2	3	素数	6	完全数
3	7	素数	28	完全数
4	15		120	
5	31	素数	496	完全数
6	63		2016	
7	127	素数	8128	完全数
8	255		32640	
9	511		130816	
10	1023		523776	
11	2047		2096128	
12	4095		8386560	
13	8191	素数	33550336	完全数
14	16383		134209536	
15	32767		536854528	
16	65535		2147450880	
17	131071	素数	8589869056	完全数
18	262143		34359607296	
19	524287	素数	137438691328	完全数
20	1048575		549755289600	
21	2097151		2199022206976	
22	4194303		8796090925056	
23	8388607		35184367894528	
24	16777215		140737479966720	
25	33554431		562949936644096	
26	67108863		2251799780130820	
27	134217727		9007199187632130	
28	268435455		36028796884746200	
29	536870911		144115187807420000	
30	1073741823		576460751766553000	
31	2147483647	素数	2305843008139950000	完全数

数学おもしろ話

2024.11.8
草　雲

９　e^{π}はπ^{e}より大きい

$e = 2.71828\cdots$　は、循環しない無限小数（無理数）で、超越数です。
$\pi = 3.14159\cdots$　も、循環しない無限小数（無理数）で、超越数です。
超越数とは、方程式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ の解にならない数のことです（ここで、nは自然数、a_nは整数）。

$$\left.\begin{aligned} e^{\pi} &= e^{\frac{1}{e} \times \pi e} \\ \pi^{e} &= \pi^{\frac{1}{\pi} \times \pi e} \end{aligned}\right\}$$

このように変形して、$e^{\frac{1}{e}}$ と $\pi^{\frac{1}{\pi}}$ の大きさを比べます。

$y = x^{\frac{1}{x}}$ のグラフを考えます。（$x > 0$）

$y = x^{\frac{1}{x}}$ の両辺に自然対数をとります。

$$\log_e y = \log_e x^{\frac{1}{x}}$$

$$\log_e y = \frac{1}{x} \log_e x \quad \cdots \quad ①$$

①の両辺をxで微分すると、

$$\frac{dy}{dx} \times \frac{1}{y} = -\frac{1}{x^2} \log_e x + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(-\frac{1}{x^2} \log_e x + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} \times x^{\frac{1}{x}} (1 - \log_e x) = 0$$ とおく。

$x = e$ となり、増減表を作成すると、

x	0		e		π	
$\frac{dy}{dx}$		＋	0	－	－	－
y		↗	$e^{\frac{1}{e}}$	↘	$x^{\frac{1}{x}}$	

数学おもしろ話

2024.11.8
草　雲

９　e^{π}はπ^{e}より大きい

ゆえに、　$e^{\frac{1}{e}} > \pi^{\frac{1}{\pi}}$　　－－－②

②の両辺をπｅ乗して、

$$\left(e^{\frac{1}{e}}\right)^{\pi e} > \left(\pi^{\frac{1}{\pi}}\right)^{\pi e}$$

$$e^{\pi} > \pi^{e}$$

よって、e^{π} は π^{e} より大きい。

数学おもしろ話

2024.11.5
草　雲

１０　ゴマをまいて円周率πの近似値を求める

正方形とそれに内接する円を描きます。
その上からランダムにゴマをばらまきます。
このとき、円周率πの近似値は次の式で求めることができます。

π＝（円に入ったゴマの個数）÷（正方形に入ったゴマの個数）×４

それでは、何故、この式で円周率πの近似値が求まるのか考えてみましょう。
円の半径をａとします。
正方形の一辺の長さは２ａとなります。
円の面積はπa^2となります。
正方形の面積は$4a^2$となります。

円に入ったゴマの個数をｎ個とします。
正方形に入ったゴマの個数をＮ個とします。

このとき、
(円の面積)：(正方形の面積)＝(円に入ったゴマの個数)：(正方形に入ったゴマの個数)
になるので、

$\pi a^2 : 4a^2 = n : N$　が成り立ちます。　↑

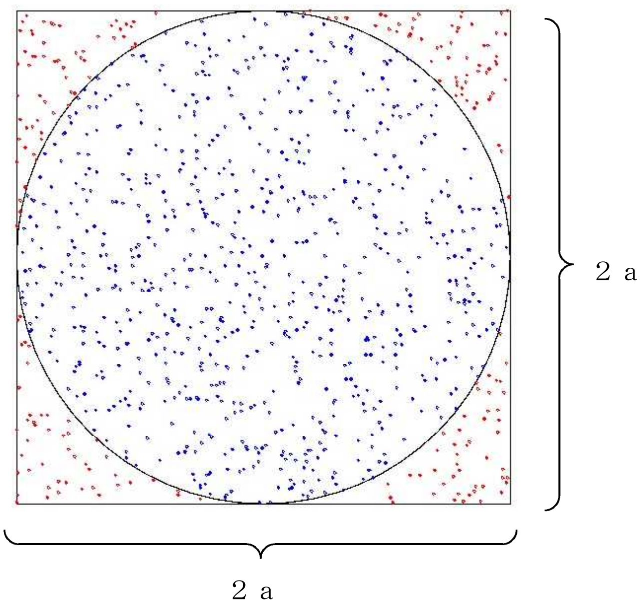
ゆえに、$\pi a^2 N = 4a^2 n$

$$\pi = \frac{4a^2 n}{a^2 N}$$

$$= \frac{4n}{N}$$

$$= n \div N \times 4$$

よって、
π＝(円に入ったゴマの個数)÷(正方形に入ったゴマの個数)×４　が成り立ちます。



左図は、一辺の長さが２ａの正方形と、それに内接する半径ａの円です。
点はゴマを表しています。
正方形に入ったゴマの個数Ｎは、
Ｎ＝１０００個でした。
円に入ったゴマの個数ｎは、
ｎ＝７８３個でした。

上述の式を用いてπの近似値を計算すると、

π＝７８３÷１０００×４
　＝３．１３２

となりました。

数学おもしろ話

2024.11.14
草　雲

１１　10円玉をばらまいて円周率πの近似値を求める

多くの平行線を間隔を等しく水平に引きます。
更に、多くの平行線を間隔を等しく垂直に引きます。
（ただし、水平な平行線と垂直な平行線の間隔は、
どちらも 10 円玉の直径に等しくします。）

格子線と言います。
（下図参照）

その上からランダムに 10 円玉をばらまきます。
このとき、円周率πの近似値は次の式で求めることができます。

π＝（格子点と重なった 10 円玉の個数）÷（ばらまいた 10 円玉の総数）×４
（格子線の縦横の平行線の交点を格子点と言います。）

それでは、何故、この式で円周率πの近似値を求めることができるのでしょうか。
10 円玉の直径を２ａとします。
格子線の縦横の平行線の間隔は各２ａとなります。（10 円玉の直径と等しいので）

下図において、黒い実線を格子線とします。
格子線の縦横の平行線の真ん中に平行に黒い点線を引きます。
下図の格子点Ｐに 10 円玉が重なるには、赤い正方形とそれに内接する円において、10 円玉の中心が内接円に入らなければなりません。10 円玉の中心が赤い正方形の中で内接円の外にある場合は格子点Ｐに 10 円玉は重なりません。

このとき、
（内接円の面積）：（正方形の面積）
＝（内接円に入った 10 円玉の中心の個数）：（正方形に入った 10 円玉の中心の個数）･･･ ①
が成り立ちます。

「内接円に入った 10 円玉の中心の個数」と「10 円玉の中心が内接円に入った 10 円玉の個数」は同じ意味です。
「正方形に入った 10 円玉の中心の個数」と「10 円玉の中心が正方形に入った 10 円玉の個数」は同じ意味です。

内接円に入った 10 円玉の中心の個数をｎ個とします。
正方形に入った 10 円玉の中心の個数をＮ個とします。
内接円の半径はａです。
正方形の一辺の長さは２ａです。
内接円の面積はπa^2になります。
正方形の面積は$4a^2$になります。

①の比例式に代入すると、

$\pi a^2 : 4a^2 = n : N$　が成り立ちます。

ゆえに、$\pi a^2 N = 4a^2 n$

$$\pi = \frac{4a^2 n}{a^2 N}$$

$$= \frac{4n}{N}$$

$$= n \div N \times 4$$

数学おもしろ話

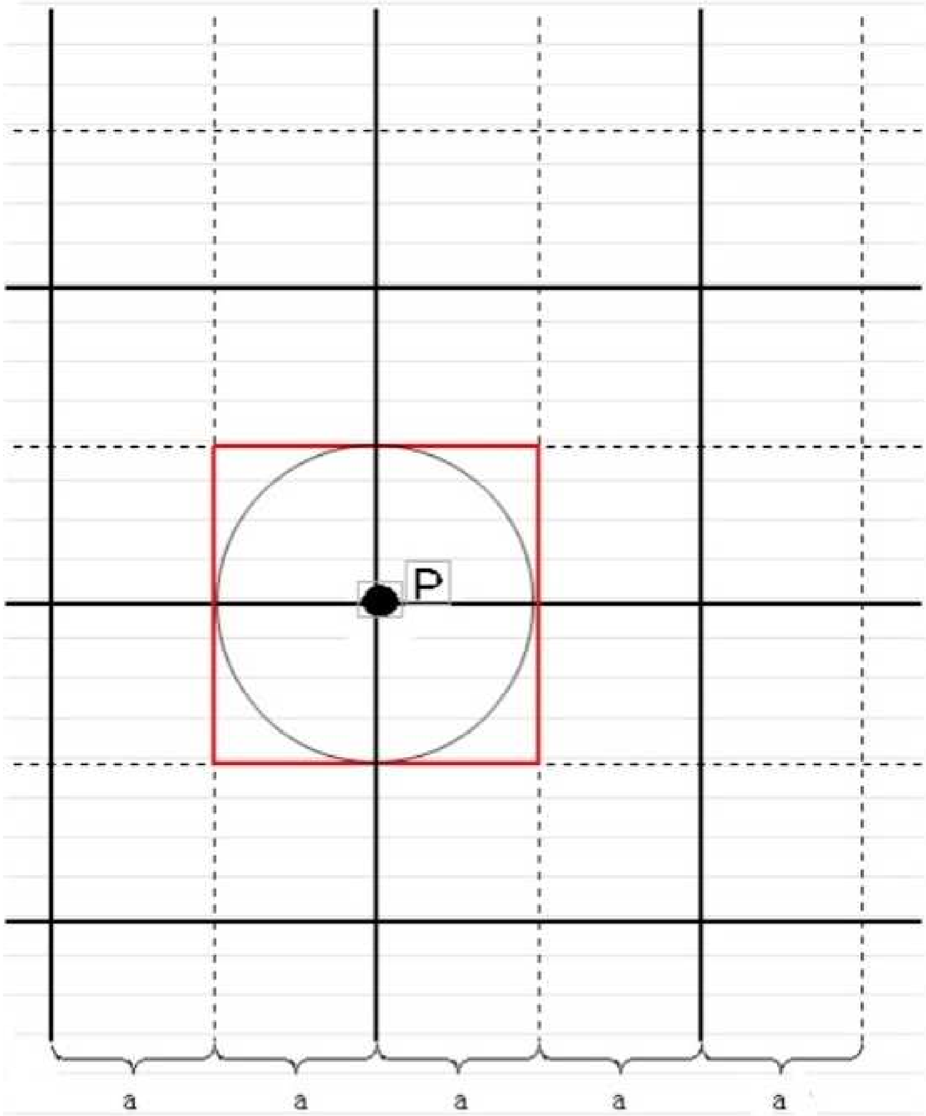
2024.11.14
草　雲

１１　10円玉をばらまいて円周率πの近似値を求める

よって、
　π＝(内接円に入った 10 円玉の中心の個数)÷(正方形に入った 10 円玉の中心の個数)×４

言い換えると、
　π＝(10 円玉の中心が内接円に入った 10 円玉の個数)÷(10 円玉の中心が正方形に入った 10 円玉の個数)×４

すなわち、
　π＝（格子点と重なった 10 円玉の個数）÷（ばらまいた 10 円玉の総数）×４
が成り立ちます。



数学おもしろ話

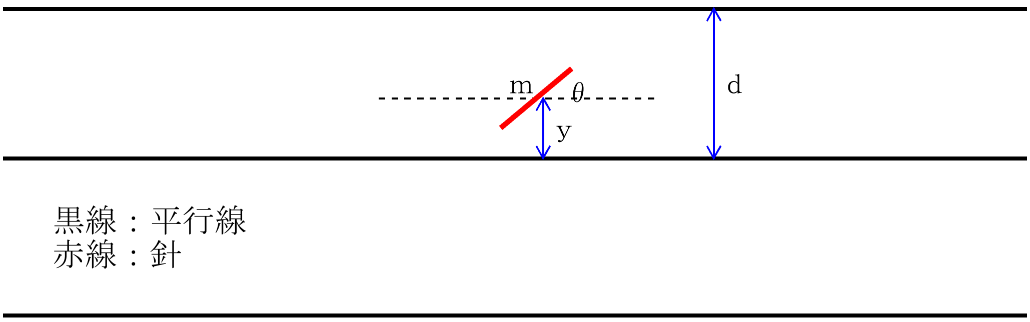
2024.11.18
草　雲

１２　針をばらまいて円周率πの近似値を求める

沢山の平行線を等間隔に引いておきます。
その上からランダムに同じ長さの針をばらまきます。
（ただし、針の長さは平行線の間隔の半分とします。）
このとき、円周率πの近似値は次の式で求めることができます。

π＝（ばらまいた針の総本数）÷（平行線と重なった針の本数）
（ただし、平行線と重ならなかった全ての針は、平行線の間に落ちたとします。）

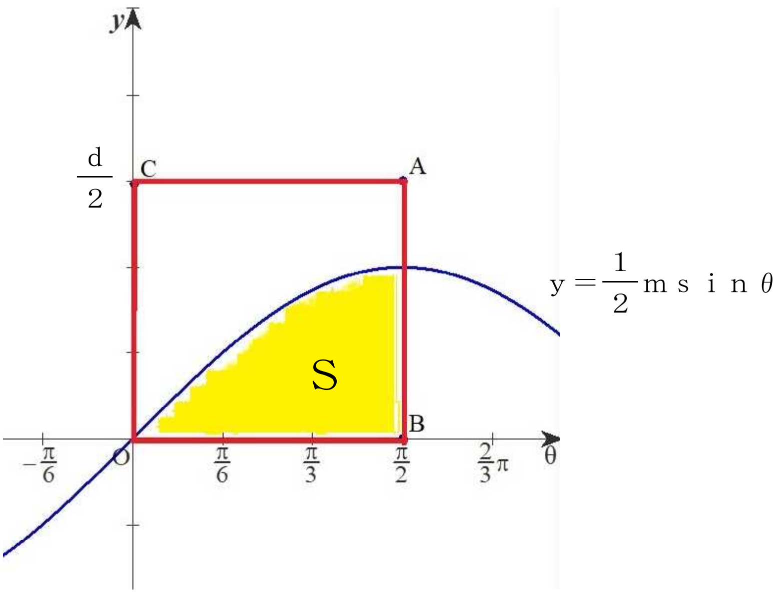
それでは、何故、この式で円周率πの近似値を求めることができるのでしょうか。
針の長さをｍとします。
平行線の間隔をｄとします。
ばらまいて落ちた針と平行線のなす角をθとします。
ばらまいて落ちた針の真ん中と平行線との距離をｙとします。（ただし、針と近い方の平行線の距離とします。）



$0 \leqq y \leqq \frac{1}{2} m \sin\theta$　のとき、　ばらまいて落ちた針と平行線は重なります。

ここで、$0 \leqq \theta \leqq \frac{1}{2}\pi$　、　$0 \leqq y \leqq \frac{1}{2} d$　を満たしています。

$y = \frac{1}{2} m \sin\theta$　のグラフを描くと、



１２　針をばらまいて円周率πの近似値を求める

$$\frac{\text{黄色部分の面積S}}{\text{□OBACの面積}} = \text{ばらまいて落ちた針が平行線と重なる割合}$$ ・・・ ①　となります。

$$\text{□OBACの面積} = \frac{\pi}{2} \times \frac{d}{2} = \frac{\pi d}{4}$$ ・・・ ②

$$\text{黄色部分の面積S} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} m \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} m \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} m \left[-\cos\theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} m \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m (0 + 1)$$

$$= \frac{1}{2} m$$ ・・・ ③

ばらまいた針の総本数をＮ本とします。
平行線と重なった針の本数をｎ本とします。

②、③、ｎ、Ｎを①に代入すると、

$$\frac{\frac{1}{2} m}{\frac{\pi d}{4}} = \frac{n}{N}$$ ・・・ ④　　が成り立ちます。

針の長さｍは平行線の間隔ｄの半分なので、ｄ＝２ｍ と表せます。

④にｄ＝２ｍを代入して、ｄを消去すると、

$$\frac{\frac{1}{2} m}{\frac{\pi (2m)}{4}} = \frac{n}{N}$$

左辺を整理して、

$$\frac{1}{\pi} = \frac{n}{N}$$

よって、$\pi = \dfrac{N}{n}$

ゆえに、
　π＝（ばらまいた針の総本数）÷（平行線と重なった針の本数）が成り立ちます。